第 4 节 立体几何常见方法综合（★★☆）

内容提要

本节归纳立体几何中的几类常见方法.

1．斜二测画法

①在已知图形中取互相垂直的 x 轴、y 轴，两轴相交于点 O，画直观图时，把它们画成对应的 x' 轴与 y' 轴，两轴相交于点 O'，且使 $\angle x'O'y'=45^\circ$（或135°），它们确定的平面表示水平面；

②已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x' 轴或 y' 轴的线段；

③已知图形中平行于 x 轴的线段，在直观图中保持原长度不变，平行于 y 轴的线段，在直观图中长度变为原来的一半；

④斜二测直观图与原图的面积关系：$S=2\sqrt{2}S'$，其中 S 和 S' 分别为原图和直观图的面积.

2．最短路径问题：空间中的最短路径问题，一般将几何体展开为平面，到平面上分析最短路径.

3．等体积法

①当直接计算某三棱锥体积不方便时，可考虑转换顶点来算体积.

②在求点到平面的距离时，也可用等体积法. 例如，要求点 A 到平面 BCD 的距离 d，若能求得 $S_{\Delta BCD}$，以及转换顶点后的三棱锥 $D-ABC$ 的体积 V_{D-ABC}，则可由 $\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}\cdot d=V_{D-ABC}$解出 d.

4．扩大截面：简单的扩大截面问题，常用平行线法来处理，详见本节例 4.

典型例题

类型Ⅰ：斜二测画法

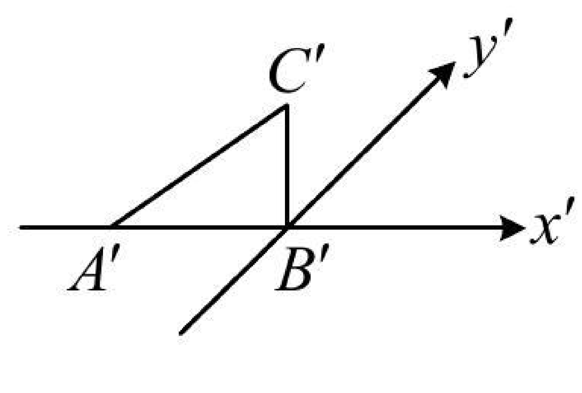
【例 1】（多选）用斜二测画法画水平放置的平面图形的直观图时，下述结论正确的是（　　）

（A）梯形的直观图仍旧是梯形

（B）若 ΔABC 的直观图是边长为 2 的等边三角形，那么 ΔABC 的面积为 $\sqrt{6}$

（C）ΔABC 的直观图如图所示，$A'B'$ 在 x' 轴上，$A'B'=2$，$B'C'$ 与 x' 轴垂直，且 $B'C'=\sqrt{2}$，则 ΔABC 的面积为 4

（D）菱形的直观图可以是矩形



解析： A 项，斜二测画法不改变平行关系，也不改变平行线段的长度大小关系，所以梯形的直观图仍旧是梯形，故 A 项正确；

B 项，原图与直观图的面积关系为 $S=2\sqrt{2}S'$，

直观图是边长为 2 的等边三角形 $\Rightarrow S'=\frac{1}{2}\times 2\times 2\times \frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\Rightarrow S=2\sqrt{2}S'=2\sqrt{6}$，故 B 项错误；

C 项，$S_{\Delta A'B'C'}=\frac{1}{2}\times 2\times \sqrt{2}=\sqrt{2}\Rightarrow S_{\Delta ABC}=2\sqrt{2}\times \sqrt{2}=4$，故 C 项正确；

D 项，如图 1，菱形 $ABCD$ 满足 $AC=2$，$BD=4$，那么在图 2 中，$A'C'=B'D'=2$，所以 $A'B'C'D'$ 为矩形，故 D 项正确.

答案：ACD

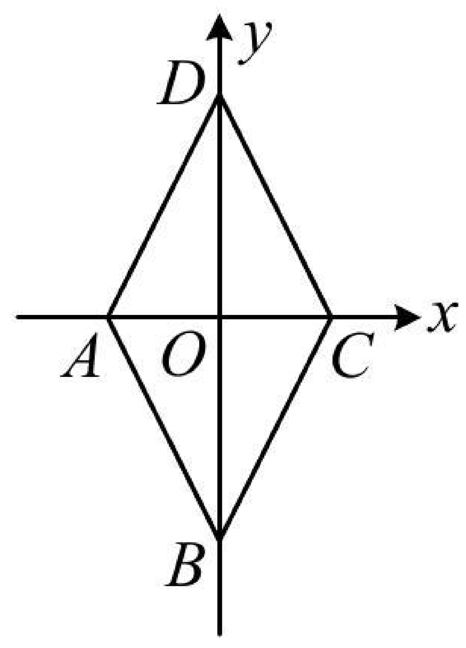


图1

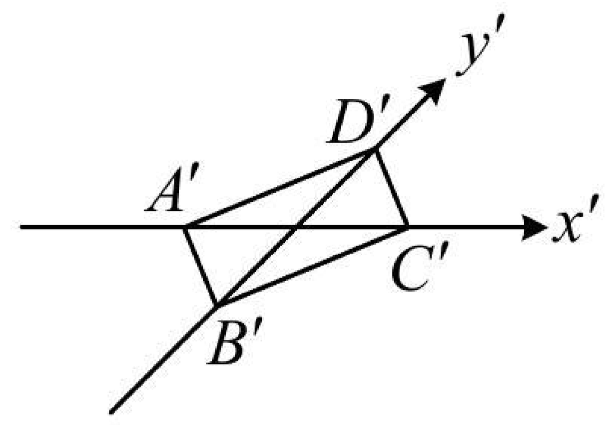
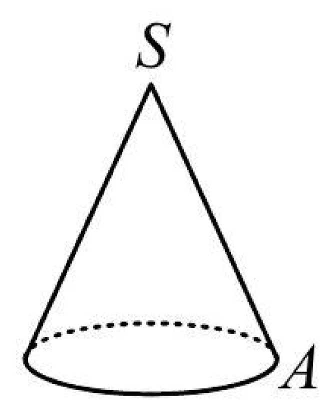


图2

类型Ⅱ：最短路径问题

【例 2】如图，已知圆锥的母线长 $SA=3$，一只蚂蚁从点 A 出发绕着圆锥的侧面爬行一圈回到点 A 的最短距离为 $3\sqrt{3}$，则该圆锥的底面半径为（　　）

（A）1　（B）2　（C）$\sqrt{2}$　（D）$\sqrt{3}$



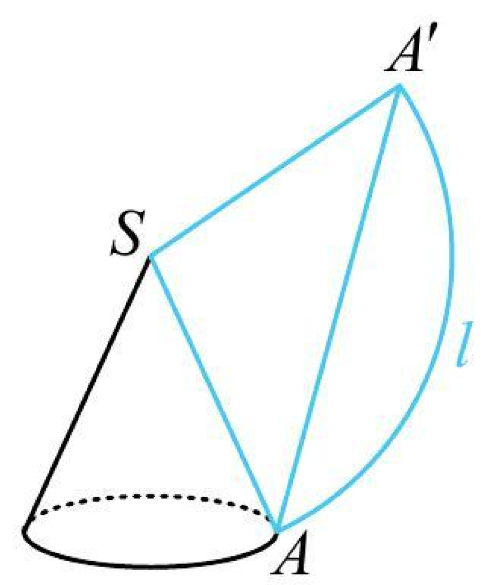
解析： 要分析最短距离，直接从圆锥上看不易，可把圆锥侧面展开，到平面上来看，

如图为圆锥的侧面展开图，题干的最短距离即为沿扇形内从 A 到 A' 的最短距离，显然沿直线最短，

所以 $AA'=3\sqrt{3}$，又 $SA=SA'=3$，所以 $\cos\angle ASA'=\dfrac{SA^2+SA'^2-AA'^2}{2SA\cdot SA'}=-\dfrac{1}{2}$，从而 $\angle ASA'=\dfrac{2\pi}{3}$，

故扇形的圆弧长 $l=\dfrac{2\pi}{3}\cdot 3=2\pi$，又 $l=2\pi r$，其中 r 为底面半径，所以 $2\pi r=2\pi$，解得：$r=1$.

答案：A



【反思】不管什么空间图形，涉及最短距离问题，一般都把空间图形展开为平面图形，到平面上来分析.

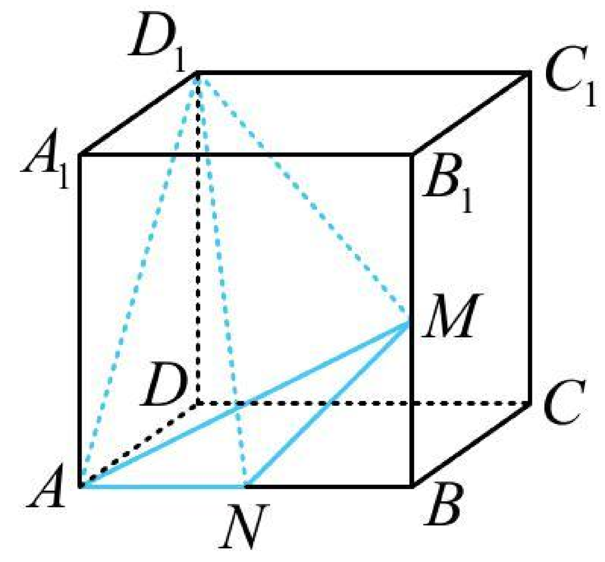
类型Ⅲ：等体积法

【例 3】（2020 • 海南卷）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M，N 分别为 BB_1，AB 的中点，则三棱锥 $A-NMD_1$ 的体积为_____.

解析： 如图，以 A 为顶点求体积，高不好找，但若转换成以 D_1 为顶点，则高即为 A_1D_1，底面积也好算，

由题意，$V_{A-NMD_1}=V_{D_1-AMN}=\frac{1}{3}S_{\Delta AMN}\cdot A_1D_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times2=\frac{1}{3}$.

答案： $\frac{1}{3}$



【变式】某车间生产一种圆台形零件，其下底面的直径为 4，上底面的直径为 8，已知 AB 为上底面的直径，圆台的高 $h=4$，点 P 是上底面圆周上一点，且 $AP=BP$，PC 是该圆台的一条母线，则点 P 到平面 ABC 的距离为（　　）

（A）$\frac{8\sqrt{5}}{15}$　（B）$\frac{4\sqrt{5}}{5}$　（C）$\frac{6\sqrt{5}}{5}$　（D）$\frac{8\sqrt{5}}{5}$

解析： 如图，直接算距离需作垂线，较麻烦，但观察发现 V_{C-PAB} 和 $S_{\Delta ABC}$ 好求，故用等体积法，

$\begin{cases}AP=BP\\AB\text{为直径}\end{cases}\Rightarrow\Delta PAB$ 是等腰 Rt 三角形，又 $AB=8$，所以 $PA=PB=4\sqrt{2}$，$S_{\Delta PAB}=\frac{1}{2}\times(4\sqrt{2})^2=16$，

点 C 到平面 PAB 的距离等于棱台的高 h，所以 $V_{C-PAB}=\frac{1}{3}\times16\times4=\frac{64}{3}$，

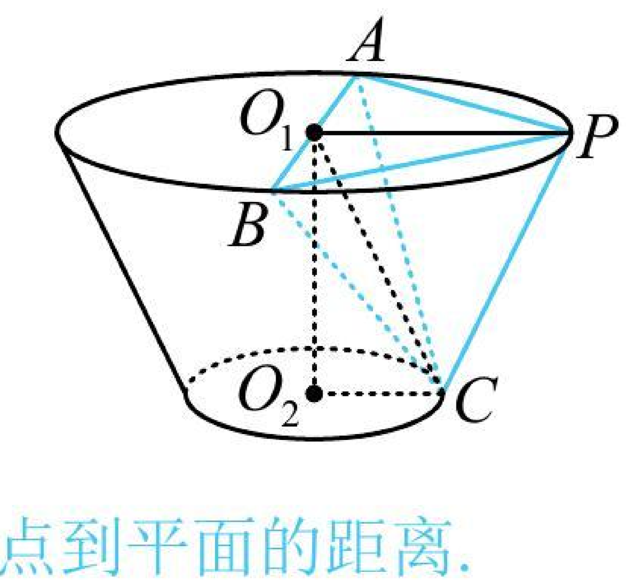
接下来求距离，也即三棱锥 $P-ABC$ 的以 ΔABC 为底面的高，还差 $S_{\Delta ABC}$，故再算它，

由图可知 $O_1C=\sqrt{O_1O_2^2+O_2C^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，且由对称性可知 $AC=BC$，所以 $O_1C\perp AB$，

故 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot O_1C=\frac{1}{2}\times8\times2\sqrt{5}=8\sqrt{5}$，设点 P 到平面 ABC 的距离为 d，

则 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot d=\frac{8\sqrt{5}}{3}d$，因为 $V_{P-ABC}=V_{C-PAB}$，所以 $\frac{8\sqrt{5}}{3}d=\frac{64}{3}$，解得：$d=\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

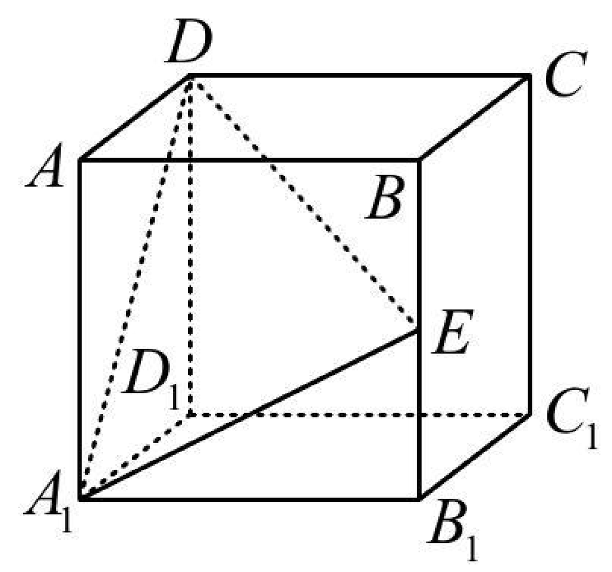
答案： D



【总结】等体积法除了用于把难求的体积转化为好求的体积计算之外，还可用于求点到平面的距离.

类型Ⅳ：多面体的截面问题

【例 4】如图，在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是棱 BB_1 的中点，则正方体过 A_1，D，E 三点的截面的面积为_____.



解析：ΔA_1DE 的边 DE 在正方体内部，截面不完整，需将其扩大，观察发现 A_1D 和 E 分别位于左、右两个面内，且过 E 在面 BB_1C_1C 内易作 A_1D 的平行线，故直接作平行线即可扩大截面，

如图 1，取 BC 中点 F，连接 DF，EF，则 $EF /\!/ B_1C /\!/ A_1D$，所以截面为 A_1DFE，

正方体棱长为 $2 \Rightarrow A_1D = 2\sqrt{2}$，$EF = \sqrt{2}$，$DF = \sqrt{CD^2 + CF^2} = \sqrt{5}$，$A_1E = \sqrt{A_1B_1^2 + B_1E^2} = \sqrt{5}$，

把截面单独画出来如图 2，作 $EM \perp A_1D$ 于 M，$FN \perp A_1D$ 于 N，则 $MN = EF = \sqrt{2}$，$A_1M = DN = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $FN = \sqrt{DF^2 - DN^2} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$，故 $S_{A_1DFE} = \dfrac{1}{2} \times (\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \times \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{9}{2}$.

答案：$\dfrac{9}{2}$

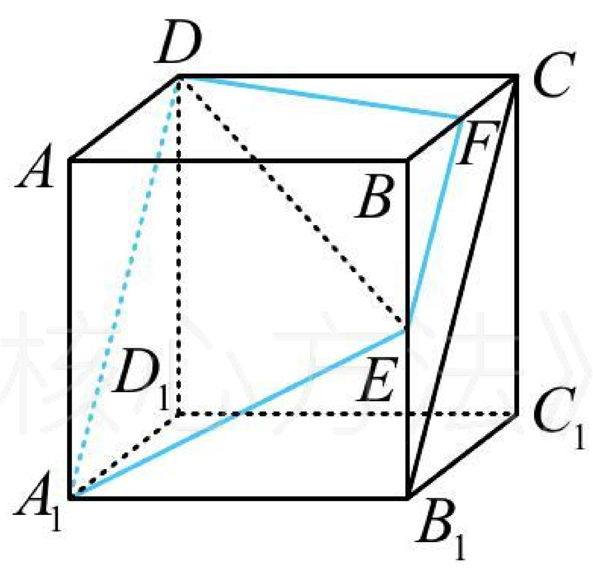


图1

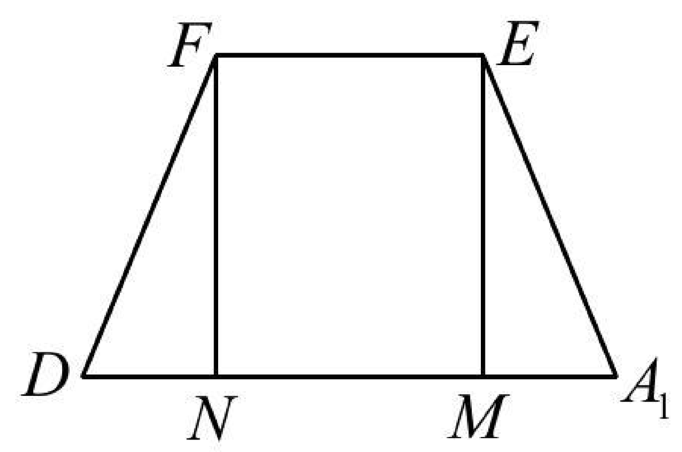
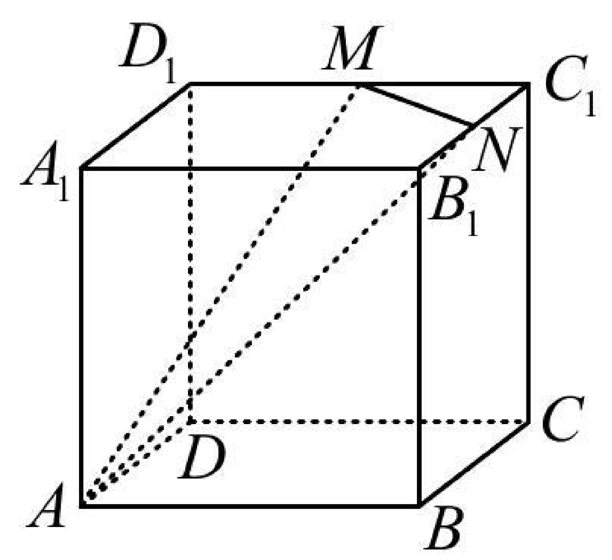


图2

【反思】直接在表面上作对侧直线的平行线是最常见的扩大截面的方法，我们称之为“平行线法”.

【例 5】如图，正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，M，N 分别为 C_1D_1 和 B_1C_1 的中点，用过 A，M，N 的平面去截正方体，则所得截面图形的周长为_____.



解析：直线 MN 和点 A 分别在上、下两个平行的面内，但若过 A 作 MN 的平行线 l，则 l 在正方体外，如图 1，不像例 4 那么好处理了，怎么办呢？此时可用“延长线法”，我们一般通过延长表面的线，找它与棱的交点，从而扩大截面. 可以发现 ΔAMN 中的 MN 在表面，所以延长它，

如图 2，延长 MN 和 A_1B_1 交于点 H，则 H 是平面 AMN 与平面 ABB_1A_1 的一个公共点，此时“小面”AMN 就扩大为了“大面”AMH. 连接 AH 交 BB_1 于 P，连接 NP，则 AP，NP 都是截面的边界线，

在做下一步之前，需先分析 P 在 BB_1 上的位置，先看 H 的位置，

因为 N 是 B_1C_1 中点，所以 $NB_1=NC_1$，结合 $\begin{cases}\angle MC_1N=\angle HB_1N=90^{\circ}\\ \angle C_1NM=\angle B_1NH\end{cases}$ 可得 $\Delta MNC_1\cong\Delta HNB_1$，

所以 $B_1H=MC_1=\dfrac{1}{2}AB$，又 $\Delta B_1PH\backsim\Delta BPA$，所以 $\dfrac{B_1P}{PB}=\dfrac{B_1H}{AB}=\dfrac{1}{2}$，

再找截面与正方体剩余面的交线，注意到此时过 M 在面 CDD_1C_1 内易作直线 AP 的平行线，故无需再用上面找点 P 的方法来扩大截面，直接作平行线即可，

作 $MG/\!/AP$ 交 DD_1 于 G，可以发现 $\Delta D_1GM\backsim\Delta BPA$，所以 $\dfrac{D_1G}{BP}=\dfrac{D_1M}{AB}=\dfrac{1}{2}$，

故 G 是靠近 D_1 的三等分点，连接 AG，完整的截面即为五边形 $AGMNP$，

可求得 $AG=\sqrt{AD^2+DG^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$，$GM=\sqrt{D_1G^2+D_1M^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{6}$，$MN=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$NP=\sqrt{B_1N^2+B_1P^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{6}$，$PA=\sqrt{AB^2+BP^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$，

故所求截面周长为 $AG+GM+MN+NP+PA=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{13}$.

答案： $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{13}$

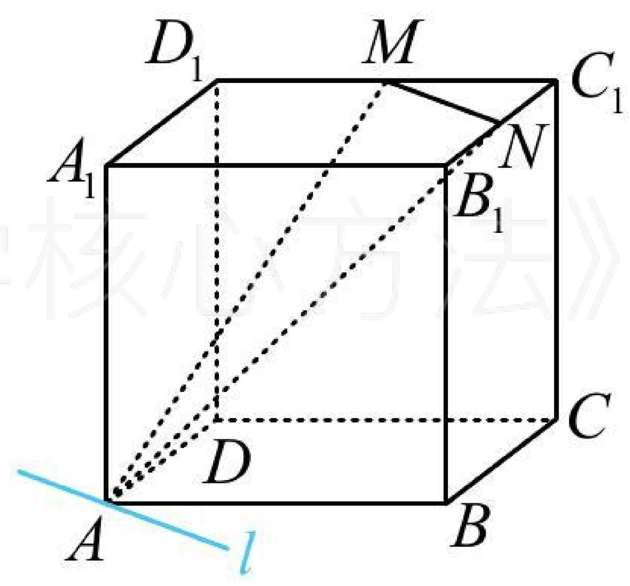


图1

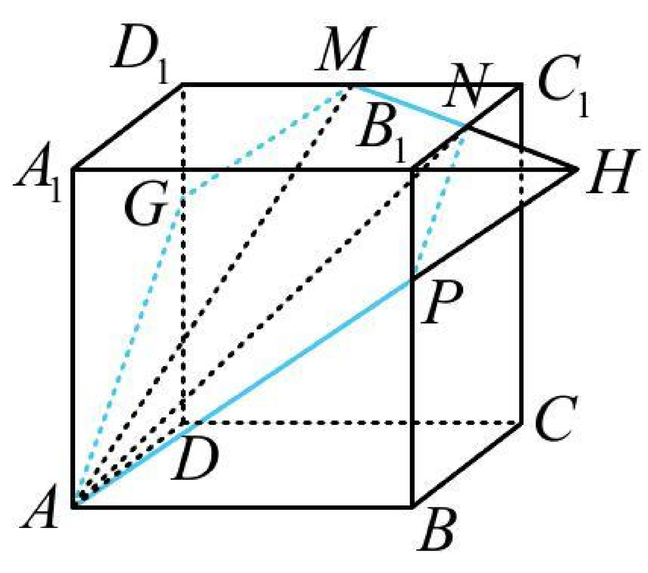
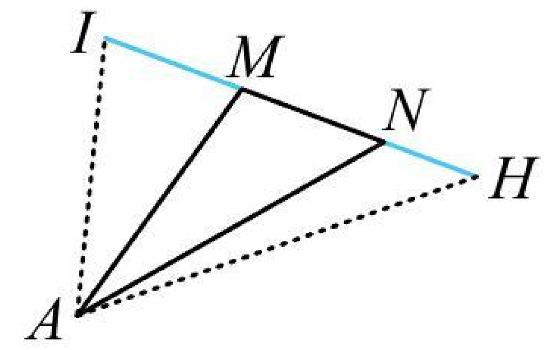
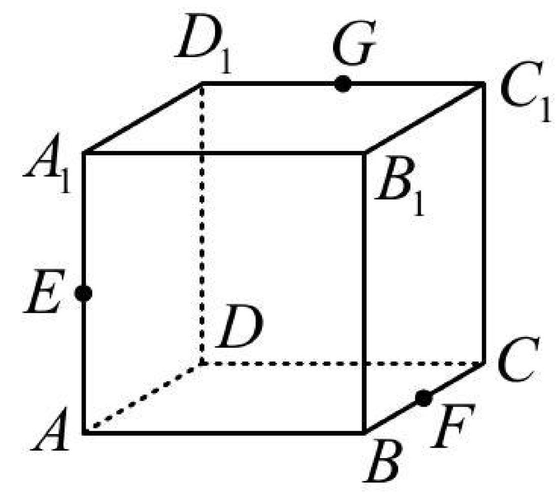


图2

【反思】当直接作平行线得到的直线在多面体外时，可通过延长表面的线，找它与棱的交点来扩大截面. 如图，以求过 A，M，N 三点的截面为例，只需延长 MN，找到它与棱所在直线的交点 H，I，截面就由 AMN 扩大为了 AHI，再看面 AHI 与其它棱的交点. 当然，有时只需找到 H，I 中的一个，就能用平行线法扩大截面了.



【例 6】如图是棱长为 1 的正方体，E，F，G 分别是所在棱的中点，则正方体的过 E，F，G 三点的截面的面积为_____.

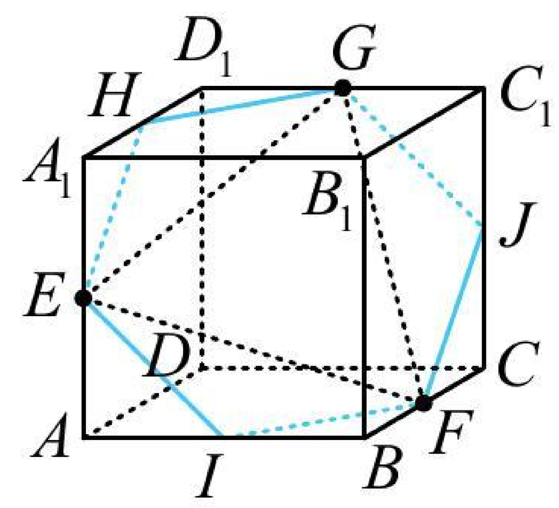


解析： 连接 GE，EF，FG，ΔGEF 三边都不在表面，上面的两种方法都不好做，怎么办？注意到 G，E，F 都是中点，故通过直观想象可猜测截面与 A_1D_1，AB，CC_1 的交点也是中点，故先取中点来看看，

设 H，I，J 分别为 A_1D_1，AB，CC_1 的中点，则由图可知截面是正六边形，其边长为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故截面面积 $S=6\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

答案： $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$



【反思】 上述截面是正方体的一个特殊截面，它与正方体所有棱所成的角都相等，可把它记住.

强化训练

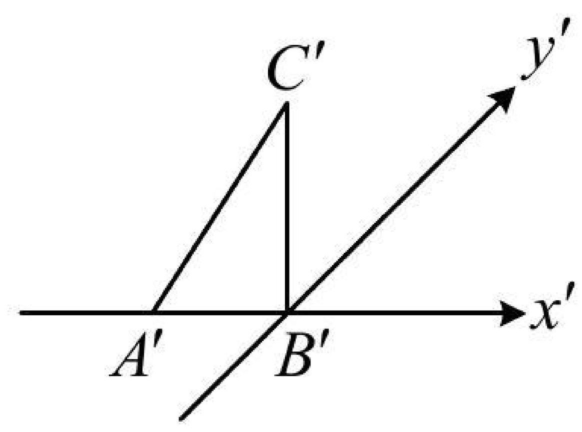
1.（★★）（多选）如图，$\Delta A'B'C'$ 表示水平放置的 ΔABC 根据斜二测画法得到的直观图，$A'B'$ 在 x' 轴上，$B'C'$ 与 x' 轴垂直，且 $B'C'=\sqrt{2}$，则下列说法正确的是（　　）

（A）ΔABC 的边 AB 上的高为 2

（B）ΔABC 的边 AB 上的高为 4

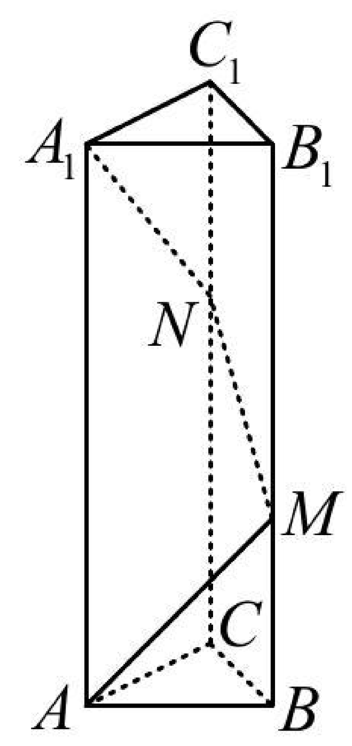
（C）$AC>BC$

（D）$AC<BC$

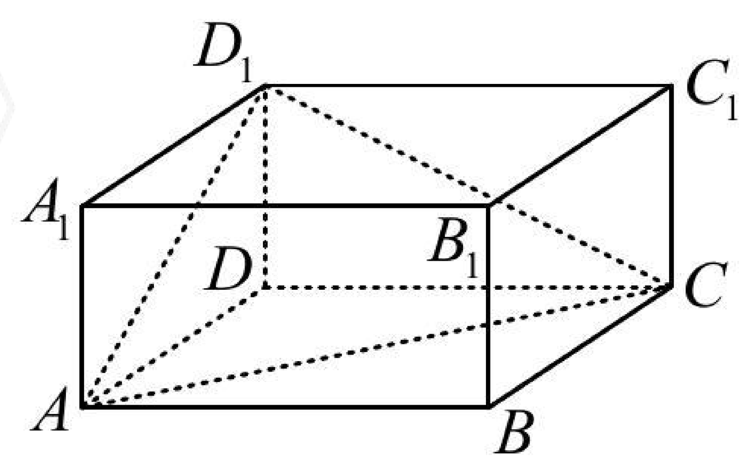


2．（2022•安徽定远模拟•★★）如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=4$，$AB=1$，一只蚂蚁从点 A 出发，沿每个侧面爬到 A_1，路线为 $A\to M\to N\to A_1$，则蚂蚁爬行的最短路程是（　　）

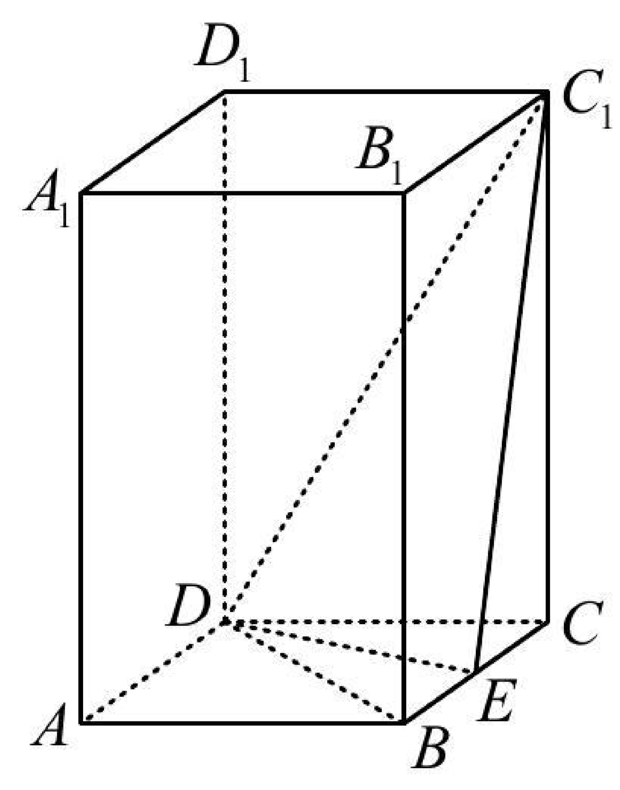
（A）4　（B）5　（C）6　（D）$2\sqrt{5}+1$



3．（★★）如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面边长为 2，高为 1，则点 D 到平面 ACD_1 的距离是_____.



4．（★★★）如图，直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形，$AA_1=4$，$AB=2$，$\angle BAD=60^{\circ}$，E 是 BC 的中点，则点 C 到平面 C_1DE 的距离为_____.



5．（★★★）在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 DD_1，DB 的中点，则三棱锥 B_1-CEF 的体积为_____.

6．（2022 • 上海模拟 • ★★★）正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4，E，F 分别为 BC，CC_1 的中点，则平面 AEF 截正方体所得的截面面积为_____.